

Top Gun 特訓 No1 「約数(1)」 問題

【テーマ 1】

①

扉とびらのついたロッカーが 200 個あり、それぞれのロッカーに 1 から 200 までの番号がひとつずつ書いてあります。最初、すべてのロッカーは扉が閉まっています。これら 200 個のロッカーに、次の 100 回の操作そうさを行います。なお、以下で『開閉する』とは、ロッカーが閉まっていれば開け、開いていれば閉めることです。

- 1 回目 全てのロッカーを開ける
- 2 回目 番号が 2 の倍数であるすべてのロッカーを閉める
- 3 回目 番号が 3 の倍数であるすべてのロッカーを開閉する
- 4 回目 番号が 4 の倍数であるすべてのロッカーを開閉する
-
- 100 回目 番号が 100 の倍数であるすべてのロッカーを開閉する

例えば 2 回目の操作の直後は、番号が奇数である 100 個のロッカーが開いていて、番号が偶数である 100 個のロッカーは閉まっています。

100 回目の操作が終わったとして、次の問いに答えなさい。

Top Gun 特訓 No1 「約数(1)」 問題

(1) 番号が 1 から 10 までの 10 個のロッカーのうち、開いているロッカーの番号をすべて書きなさい。

(2) 番号が 99, 100, 101 のロッカーは、それぞれ何回開閉されましたか。開けた回数と閉めた回数の合計を答えなさい。

(3) 200 個のロッカーのうち、開いているロッカーは何個ありますか。

<2017 年 筑波大学附属駒場中>

Top Gun 特訓 No1 「約数(1)」 問題

【テーマ 2】

2

392 の奇数の約数は 個あり、それらの和は です。また偶数の約数は 個あり、それらの和は です。

<桜蔭中>

3

次の空らん ~ にあてはまる数を答えなさい。

2016 の約数を考えます。約数は全部で 個あり、そのうち偶数は 個あります。

次に、約数を小さいものから順に並べ、1 番目から 31 番目までを全て足すと になり、約数を全て足すと になります。また、約数を全てかけた数は、2 で 回割り切れ、3 で 回割り切れ、7 で 回割り切れるので、2016 で割ると、 回割り切れます。

<2016 年 駒場東邦中>

Top Gun 特訓 No1 「約数(1)」 問題

【テーマ 3】

4

10人以上100人未満の2つのグループ A、B があります。415個のお菓子をグループ A だけに同じ数ずつ配ると8個余ります。同じ個数のお菓子を、グループ B だけにグループ A より1個ずつ多く配ると7個余ります。グループ B の人数は何人ですか。

<2015 年 慶應義塾普通部>

Top Gun 特訓 No1 「約数(1)」 問題

【テーマ 3(続き)】

5

A を B で割ったときのあまりが C であることを $(A, B) = C$ と表すことにします。例

えば、63 を 28 で割ると 7 あまるから、 $(63, 28) = 7$ と表せます。いま、 $(A, B) =$

C において、A を 624 から、B を 1 からそれぞれ 1 ずつ増やしていくことを考えます。

下の表はそのときの A、B、C の値の一部をまとめたものです。

| A | B | C |
|-----|----|---|
| 624 | 1 | 0 |
| 625 | 2 | 1 |
| 626 | 3 | 2 |
| 627 | 4 | 3 |
| 628 | 5 | 3 |
| 629 | 6 | 5 |
| 630 | 7 | ア |
| 631 | 8 | 7 |
| 632 | 9 | 2 |
| 633 | 10 | 3 |
| 634 | 11 | イ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |

(1) 空らんア、イにあてはまる整数を求めなさい。

(2) $(A, B) = 0$ となるような 2 けたの整数 B を求めなさい。

(3) $(A, B) = 5$ となるような 2 けたの整数 B がいない理由を、すべての場合を調べるこ

となく説明しなさい。

<2016 年 駒場東邦中>

Top Gun 特訓 No1 「約数(1)」 問題

【テーマ 4】

6

4以上の素数を除く整数についてだけ、次のように考えます。その整数を素数だけの積の形で表したとき、「何種類の素数が出てくるか」と「何個の素数の積であるか」に注目し、その2つの和を素数の得点とします。

例えば、12の得点は $2 \times 2 \times 3$ となるので、「2種類の素数が出てくる」と「3個の素数の積である」から $2+3$ で5点となります。

- (1) 180の得点は何点ですか。
- (2) 得点がちょうど3点になる整数を小さい方から3つ求めなさい。
- (3) 得点がちょうど6点になる50以下の整数を全て求めなさい。

Top Gun 特訓 No1 「約数(1)」 問題

【テーマ 4(続き)】

⑥(続き)

(4) 1000 以下の整数のうち、得点が最も大きくなるものの得点は何点かを求めなさい。

また、その最も大きい得点になる 1000 以下の整数を全て求めなさい。

<2015 年(第 1 回) 渋谷教育学園渋谷中>

Top Gun 特訓 No1 「約数(1)」 問題

【テーマ 4(続き)】

7

表には1から50までの整数をかき、裏には何もかいていないカードがつぎのように並べられている。

[1][2][3][4][5][6][7][8]·····[47][48][49][50]

まず、左から2番目ごとにカードを裏返し、さらに左から3番目ごとにカードを裏返すとつぎのようになる。

[1]□□□[5][6][7]□·····[47][48][49]□

[6]や[48]などのカードは2回裏返されたので表となっている。同じように、さらに4番目ごと、5番目ごと、·····,25番目ごとに裏返してこの操作を終わる。つぎの問いに答えよ。

Top Gun 特訓 No1 「約数(1)」 問題

7 (続き)

(1) 4 番目ごとにカードを裏返し終わったときには、表向きのカードは何枚になっているか。

(2) すべての操作が終わったとき、つぎの問いに答えよ。

(ア) [16]のカードは何回裏返されたか。

(イ) (ア)と同じ回数だけ裏返されたカードにかいてある整数で 16 以外のものをすべてかけ。

<1993 年(2 日目) 灘中>

Top Gun 特訓 No1 「約数(1)」 問題

【テーマ 5】

8

- (1) 12 の約数の、それぞれの逆数の和を求めなさい。
- (2) ある数 X の約数の和を求めたら 6552 でした。また、 X の約数のそれぞれの逆数の和を求めたら $3\frac{1}{4}$ でした。 X を求めなさい。
- (3) ある数 Y の約数の、それぞれの逆数の和は正しく $2\frac{4}{5}$ と求めましたが、約数の和は Y 自身を足すことを忘れてしまったので 108 となりました。 Y を求めなさい。

<2018 年(1 回目) 海城中>

Top Gun 特訓 No1 「約数(1)」 問題

【テーマ 5(続き)】

9

ある整数 A のすべての約数^{やくすう}について、それぞれの逆数^{ぎやくすう}をつくります。つくった数をすべて足しあわせてできる数を $\langle A \rangle$ と表すことにします。

たとえば、 $\langle 6 \rangle = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 2$ です。

このとき、次の各問^{かく}いに答えなさい。

- (1) $\langle 8 \rangle$ 、 $\langle 9 \rangle$ 、 $\langle 72 \rangle$ はそれぞれいくつですか。
- (2) $\langle 3240 \rangle$ はいくつですか。

<2019 年(第 2 回) 渋谷教育学園幕張中>